La demande compesée et le bien etre.

Elena Panova.

Fall, 2023.

L'utilité indirect.

$$\begin{cases} \max\limits_{(x_1,\ldots,x_n)} u(x_1, \ldots, x_n) \\ s.c.\ p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n \leqslant R \end{cases}$$

Demande Marshallienne:

$$x^D(p, R) = (x_1(p, R), x_2(p, R), \ldots, x_n(p, R))$$

ou $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$.
L'utilité indirect:

$$V(p, R) = u(x_1(p, R), x_2(p, R), \ldots, x_n(p, R)).$$

L'utilité indirect.

$V(p, R)$ est décroissante par rapport aux prix des biens.
L'intuition: Lorsque le prix d'un bien augmente, l'espace des paniers admissibles se restreint ■le consommateur ne pourra pas choisir un meilleur panier qu'avant (au sens de ses préférences)
Preuve (pour deux biens):

$$\frac{\partial V(p,R)}{\partial p_x} = u_x^{'}(x(p,R), y(p,R))\frac{\partial x(p,R)}{\partial p_x} + u_y^{'}(x(p,R), y(p,R))\frac{\partial y(p,R)}{\partial p_x} = \lambda\left(p_x\frac{\partial x(p,R)}{\partial p_x} + p_y\frac{\partial y(p,R)}{\partial p_x}\right).$$

En diff le contraint budgetaire par rapport à p_x:

$$p_x\frac{\partial x(p,R)}{\partial p_x} + p_y\frac{\partial y(p,R)}{\partial p_x} = -x(p,R), \text{ d'ou } \frac{\partial V(p,R)}{\partial p_x} = -\lambda x(p,R) < 0.$$

L'utilité indirect.

$V(p, R)$ est croissante par rapport au revenu.
Preuve (pour deux biens):

$$\frac{\partial V(p,R)}{\partial R} = u_x^{'}(x(p,R), y(p,R))\frac{\partial x(p,R)}{\partial R} + u_y^{'}(x(p,R), y(p,R))\frac{\partial y(p,R)}{\partial R} = \lambda\left(p_x\frac{\partial x(p,R)}{\partial R} + p_y\frac{\partial y(p,R)}{\partial R}\right).$$

En diff le contraint budgetaire par rapport à R:

$$p_x\frac{\partial x(p,R)}{\partial R} + p_y\frac{\partial y(p,R)}{\partial R} = 1, \text{ d'ou } \frac{\partial V(p,R)}{\partial p_x} = \lambda > 0.$$

L'utilité indirect.

$V(p, R)$ *est homogène de degré 0, c'est-à-dire* $V(\alpha p, \alpha R) = V(p, R)$ pour tout $\alpha > 0$.

$$\begin{cases} \max\limits_{(x_1, \ldots, x_n)} u(x_1, \ldots, x_n) \\ s.c. \ p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n \leqslant R \end{cases}$$

$$x^D(p, R) = (x_1(p, R), x_2(p, R), \ldots, x_n(p, R))$$

$x^D(\lambda p, \lambda R) = x^D(p, R)$.

Exercise: Trouvez l'utilité indirect et verifiez ces propiétés pour $u(x, y) = xy$. Trouvez la valeur de l'utilité indirect si $p_x = p_y = 1$ et $R = 40$.

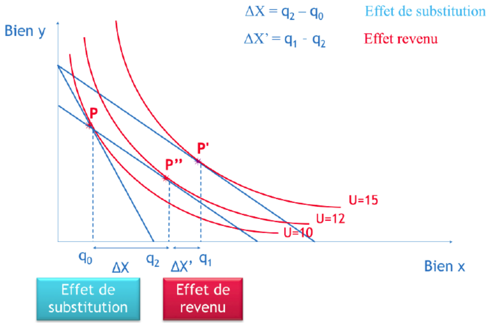
Les effets de la substitution et du revenu.

Supposons qu'il y a deux biens x et y.
Supposons que p_x baisse (R et p_y restent unchangés).

- le rapport des prix change, et il aura la substitution de y pour x (effet substitution).
- revenu réel exprimé en terme de ce bien augmente (effet de revenu).

Les effets de la substitution et du revenu à la Slutzky.

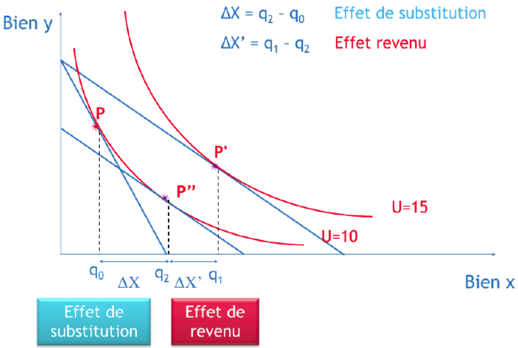
L'effet de substitution à la Slutzky mesure le changement de choix optimal du consommateur suite à une variation des prix relatifs, *à pouvoir d'achat constant*:



Exercise: Supposons que $u(x, y) = xy$. Initialement $p_y = p_x = 1$. Prix p_x baisse: $p_x = 1/2$. Trouvez ES et ER à la Slutzky.

Les effets de la substitution et du revenu à la Hicks.

L'effet de substitution à la Hicks décrit le changement de choix optimal suite à une variation des prix relatifs, en ajustant le revenu nominal de manière à maintenir *l'utilité constante*.



Exercise: Supposons que $u(x,y) = xy$. Initialement $p_y = p_x = 1$. Prix p_x baisse: $p_x = 1/2$. Trouvez ES et ER à la Hicks.

La demande de Hicks (la demande "compencée").

$$\begin{cases} \min\limits_{(x_1,...,x_n)} p_1 x_1 + ... + p_n x_n \\ s.c.\ u(x_1, ..., x_n) \geqslant U \end{cases}$$

$$h(p, U) = (h_1(p, U), h_2(p, R), ..., h_n(p, U))$$

Lagrangian: $\mathcal{L} = p_1 x_1 + ... + p_n x_n - \mu \left(u(x_1, ..., x_n) - U \right)$.

$$\mathcal{L}^{'}_{x_i} = 0,\ \mathcal{L}^{'}_{\mu} = 0.$$

Exercises: Supposons que $u(x, y) = xy$ et $p_y = 1$.

- Trouvez la demande de Hicks pour $U = 400$. Trouvez la demande de Hicks pour $u(x, y) = \ln x + \ln y$ et $U = \ln 400$.
- Tracez la demande Marshalien pour bien x si $R = 40$. Sur la meme graphique, tracez la demande de Hicks pour bien x si $V = 400$.

Demande de Hicks.

Propriétés:

- $$\left(h(p', U) - h(p, U)\right)\left(p' - p\right) \leqslant 0.$$

  La demande de Hicks pour bien x est decroissante en p_x (pas toujours le cas pour la demande Marshalien, illustration sur le tableau).

- Homogeneite de degre 0 en p:

  $$h(\alpha p, U) = h(p, U).$$

La fonction de depence minimale.

$$e(p, U) = ph(p, U).$$

Propriétés:

- $e(p, U)$ est croissante par rapport aux prix des biens.
- $e(p, U)$ est croissante par rapport à l'utilité à atteindre.
- $e(p, U)$ est homogène de degré 1 en p: $e(\alpha p, U) = \alpha e(p, U)$.

Exercises:

- Supposons que $u(x, y) = xy$. Trouvez la fonction de depences minimales et verifiez ces propiétés.
- Comparez les fonction des depences minimales si: (i) $u(x, y) = xy$ et $U = 10$, (ii) $u(x, y) = \ln x + \ln y$ et $U = \ln 10$.

Dualité.

$$x(p, R) = h(p, V(p, R))$$
$$e(p, V(p, R)) = R$$
$$h(p, U) = x(p, e(p, U))$$
$$V(p, e(p, U)) = U$$

Illustration sur le tableau.
Exercise: Verifiez les equations de dualité pour $u(x, y) = xy$.

Exercise.

- Supposons que les preferences sont representés par la fonction d'utilité $u(x, y) = \frac{xy^3}{27}$. Supposons que $p_y = 1$ et $R = 4$. Notons $p_x = p$.
- Trouvez les demandes Marshaliens et la fonction de valeur.
- Trouvez les demandes Hicksiens pour $V = 1$.
- Tracez les deux courbes de la demande en marquand les demandes pour les prix $1/2$, 1 et 2.
- Verifiez la dualité des problemes de maximisation d'utilité et minimisation des depences.
- Trouvez les effets de substitution et de revenue à la Hicks si: (i) p augmente de 1 a 2; (ii) p baisse de 1 a $1/2$. Illustrez vos reponces.

Exercise.

- Supposons que les preferences sont representés par la fonction d'utilité $u(x, y) = x + y$. Supposons que $p_y = 1$ et $R = 1$. Notons $p_x = p$.
- Trouvez les demandes Marshaliens et la fonction de valeur.
- Trouvez les demandes Hicksiens.
- Trouvez les effets de substitution et de revenue à la Hicks si le prix p augment de $1 - \alpha$ a $1 + \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$. Illustrez vos reponces.

Equation de Slutzky:

$$\frac{\partial x_i(p,R)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i(p,U)}{\partial p_j} - \frac{\partial x_i(p,R)}{\partial R} x_j\,(p,R)$$

Preuve: Posons $R = e(p,U)$. Prenons une diff partiel $\frac{\partial}{\partial p_j}$ de l'equation

$$h_i\,(p,U) = x_i\,(p, e(p,U))\,. \tag{1}$$

On touvre

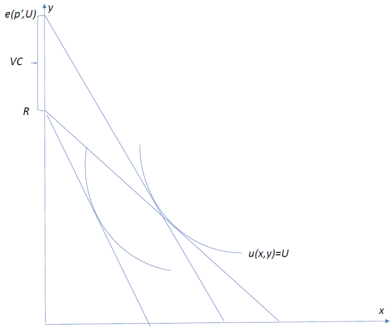
$$\frac{\partial h_i(p,U)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(p,R)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p,R)}{\partial R}\frac{\partial e(p,U)}{\partial p_j}.$$

Rapplons nous que $\frac{\partial e(p,U)}{\partial p_j} = h_j\,(p,U)$ et $h_j\,(p,U) = x_j\,(p, e(p,U))$.

Variation compensé

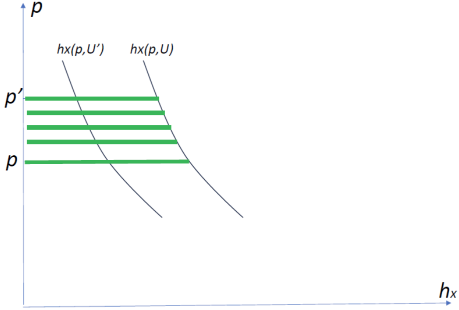
Supposons que le prix d'un bien est augmenté (plusieurs situations sont y inclus).
Comment mesurer la perte des consommateurs? Est-ce que la valeur perdu (changement de fonction de valuer) est un bon mesure ?

$$VC = e(p, V(p, R)) - e(p', V(p, R))$$



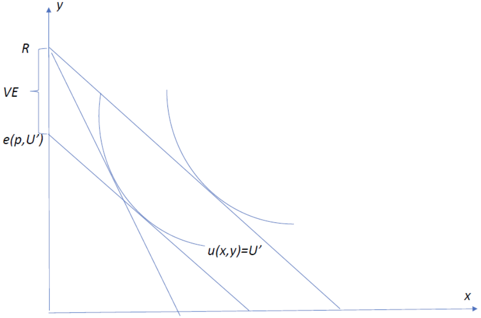
Variation compensé

$$VC = \int_{p'}^{p} \frac{\partial e(p,U)}{\partial p_i} dp_i = \int_{p'}^{p} h(p,U) dp_i$$



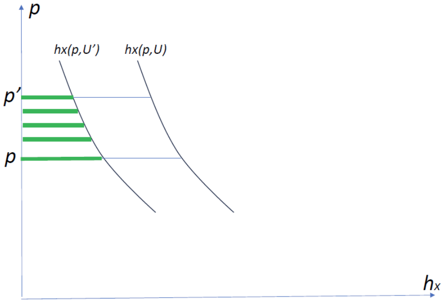
Variation equivalent.

$$VE = e(p, V(p, R)) - e(p, V(p', R))$$



Variation equivalent.

$$VE = \int_{p'}^{p} \frac{\partial e(p, U')}{\partial p_i} dp_i = \int_{p'}^{p} h(p, U') dp_i$$



Surplus de consommateur.

$$\min\{VC, VE\} \leqslant SC = \int_{p'}^{p} x(p,R)\,dp_i \leqslant \max\{VC, VE\}$$