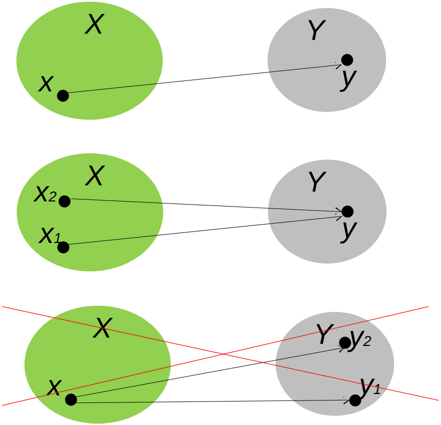
Rappel mathematique: fonctions et graphiques.

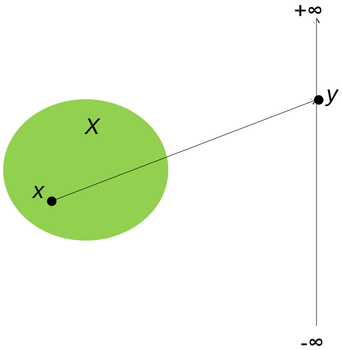
Fonction.

Definition. Une fonction $f : X \longrightarrow Y$ est une relation qui associés chaque element x d'ensemble X (son domain) avec un seul element y d'ensemble Y (sa gamme).



Fonction réelle.

Definition. Une fonction réele est une fonction dont la gamme est les nombres réels ($Y = IR$).



Exemples: la température d'un objet physique, l'altitude d'un endroit, le temps nécessaire pour aller d'un endroit a l'autre (google maps), le prix d'eau.

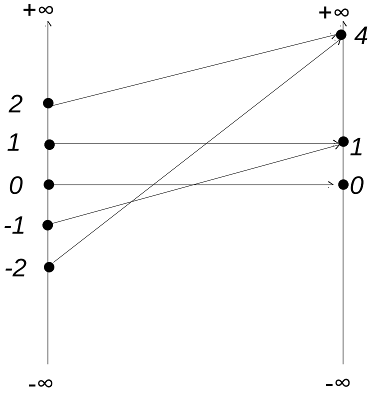
Formule d'une fonction.

- Le temps d'optimisation dans la "problème du commis voyageur" augmente quadratiquement avec le nombre de carrefours. Formellement, $f : IN \longrightarrow IN \times IN$ est donne par équation $f(n) = n^2$.
- Le temps d'une diffusion augmente quadratiquement avec la distance. Formellement, $f : IR \longrightarrow IR$ est donne par équation $f(x) = \frac{x^2}{D}$, ou D est une constant de la diffusion.
- Les consommateurs d'eau payent un prix p par litre.[2] Formellement, $f : IR \longrightarrow IR$ est donne par équation $f(x) = px$.
- Les consommateurs d'eau payent un frais d'abonnement T et un prix p par litre. Formellement, $f : IR \longrightarrow IR$ est donne par équation $f(x) = T + px$.

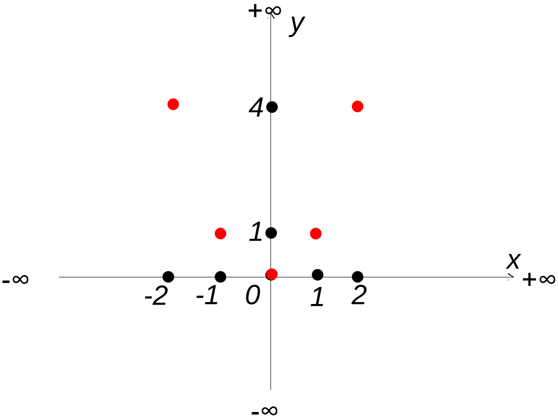
[2] Supposons que le quantité d'eau consomme est une variable continue.

Graphique d'une fonction.

Considérons la fonction définie par équation $f(x) = x^2$.

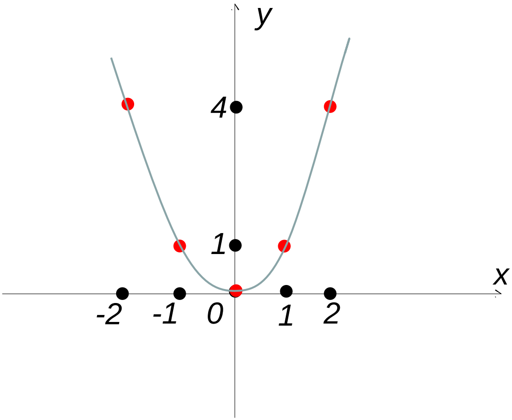


Graphique d'une fonction.



Graphique d'une fonction.

$$\left\{(x,y) \in I\!R^2 \mid y = x^2\right\}.$$



Fonctions monotones.

Definition. La fonction est *strictement croissante*: $f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow x_1 > x_2$ ("conserve" l'ordre).
La fonction est *feblement croissante*: $f(x_1) \geqslant f(x_2) \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

La fonction est *strictement décroissante*: $f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$ ("inverse" l'ordre).
La fonction est *feblement décroissante*: $f(x_1) \geqslant f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$.

La fonction est *constante*: $f(x_1) = f(x_2)\ \forall\ \ x_1 < x_2$.

Exemples: a et b sont des constantes positives. (i) $f(x) = ax + b$; (ii) $f(x) = b$; (iii) $f(x) = -b$; (iv) $f(x) = \min\{x, 0\}$; (v) $f(x) = \min\{0, -x\}$; (vi) $f(x) = -ax + b$.

Fonction convex et concave.

Definition La fonction est *strictement convex*:
$f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$.
La fonction est *strictement concave*:
$f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) > \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$.
La fonction est *affine*:
$f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) = \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$.

Exemples: (i) $f(x) = ax + b$; (ii) $f(x) = x^2$; (iii) $f(x) = b$; (iv) $f(x) = -x^2$; (v) $f(x) = \sqrt{x}$.

Maximum et minimum d'une fonction.

Definition. $f(x^*)$ est un *maximum globale* de la fonction $\Leftrightarrow f(x^*) \geqslant f(x) \ \forall \ x$.

$f(x^*)$ est un *minimum globale* de la fonction $\Leftrightarrow f(x^*) \leqslant f(x) \ \forall \ x$.

Exemples: (i) $f(x) = ax + b$; (ii) $f(x) = x^2$; (iii) $f(x) = b$; (iv) $f(x) = -x^2$; (v) $f(x) = |x|$.

Exercise 1.

a) Tracez les graphiques des fonctions suivantes: $f(x) = \frac{1}{2}x^2$; $f(x) = -x^2$; $f(x) = 2x$; $f(x) = 10 + 2x$.

b) Trouvez les fonctions croissantes parmis ces fonctions.

c) Trouvez les fonctions concaves parmis ces fonctions.

d) Trouvez le maximum de la fonction $f(x) = -|x|$.

e) Trouvez le minimum de la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.