

Dérivé d'une fonction

Elena Panova.

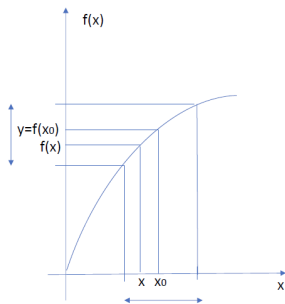
September, 2023.

Limite d'une fonction: définition.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Information suffisante pour ce cours : si $f(x)$ est continue alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$



Exemples: $f(x) = x^2$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \sqrt{x}$.

Dérivé d'une fonction: définition.

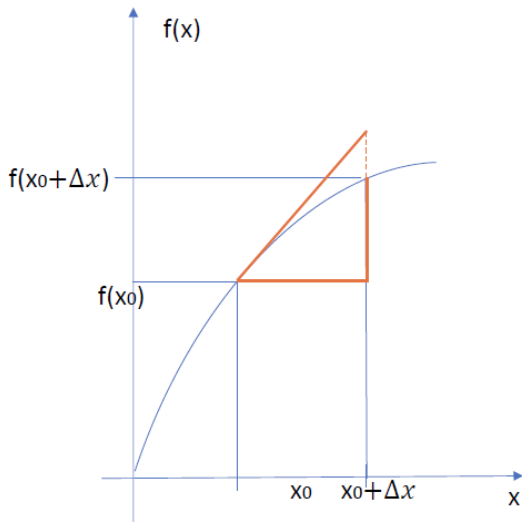
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Exemples: $f(x) = x^2$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \text{const.}$

Remarquez que la valeur de la dérivé varie d'un point x à l'autre.

Dérivé d'une fonction: illustration graphique.

Graphiquement, la dérivée d'une fonction correspond à la pente de sa droite tangente en un point spécifique.



Dérivés partielles et derive totale d'une fonction.

Considerons $f(x, y, \dots, z)$.

Dérivés partielles:

$$f'_x(x, y, \dots, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y, \dots, z) - f(x, y, \dots, z)}{\Delta x}$$

$$f'_y(x, y, \dots, z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y+\Delta y, \dots, z) - f(x, y, \dots, z)}{\Delta y}$$

...

Dérivés partielles et derive totale:

$$df(x, y, \dots, z) = f'_x(x, y, \dots, z) dx + f'_y(x, y, \dots, z) dy + \dots + f'_z(x, y, \dots, z) dz$$

Quelques règles de dérivation.

$$\begin{aligned}(f(x) + g(x))' &= f'(x) + g'(x) \\ (f(x) \cdot g(x))' &= f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x) \\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)} \\ (f(g(x)))' &= f'_g \cdot g'_x\end{aligned}$$

Dérivé seconde (des fonctions croissantes concaves et convexes).

$$f''(x) = (f'(x))'_x$$

Supposons que $f(\cdot)$ est croissante. Quelle est le signe de $f''(x)$ si:

- f est concave
- f est convexe

Dérivés des fonctions de “base”.

Trouvez $f'(x)$ et $f''(x)$ si $f(x)$ est égal à:

$$x^\alpha, \ln x, e^x, \alpha x, \alpha.$$