Le choix optimal sous la contrainte budgétaire.

Elena Panova.

Fall, 2023.

La contrainte budgétaire.

- Supposons q'il y a deux biens (x – viande, y – pates).
- Le consommateur dispose d'un budget limité (R euros).
  - ensemble du revenu (si on considère toute la consommation)
  - budget spécifique pour un type de consommation particulier (choix cinéma/salle de sport pour un budget loisirs donné).
- Prix des biens $(p_1, p_2, ..., p_n)$.
- Le revenu et les prix des biens sont des variables dites exogènes (ils s'imposent au consommateur dans ses choix, celui-ci ne peut pas les modifier).

La contraint budgetaire:

$$p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n \leqslant R. \tag{1}$$

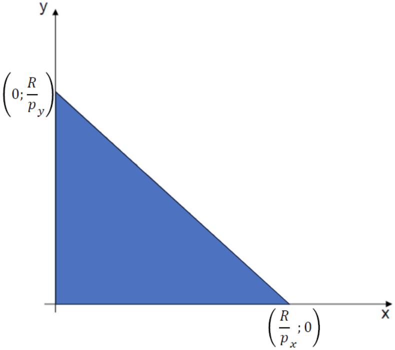
En utilisant les notations $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$, $px \leqslant R$.

L'ensemble budgétaire.

L'ensemble budgétaire est l'ensemble des paniers de biens que le consommateur peut acheter pour un revenu et des prix des biens donnés:

$$EB = \{x \in \mathbb{R}^n_+ \,|\, px \leqslant R\}$$

Notons que l'ensemble budgétaire est un ensemble convexe (d'alternatifs). Supposons $n = 2$ (deux biens).



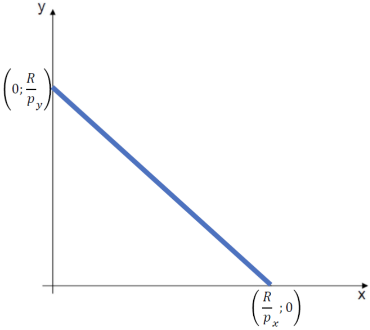
La droite budgétaire.

Si tout le revenu est dépensé, on dira que la contrainte budgétaire est saturée.

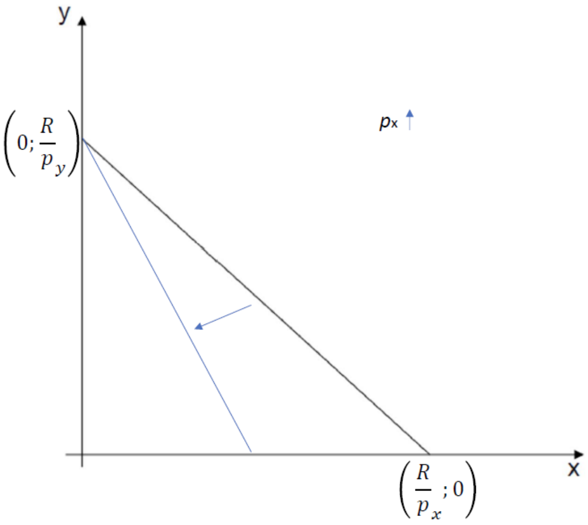
La droite budgétaire DB est l'ensemble des paniers de biens qui saturent la contrainte budgétaire:

$$DB = \{x \in \mathbb{R}^n_+ \,|\, px = R\}$$

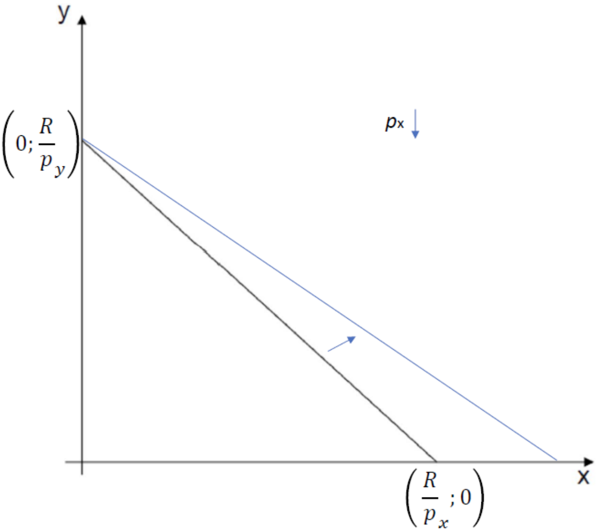
Deux biens x et y, DB est donné par equation $y = \frac{R}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x$:



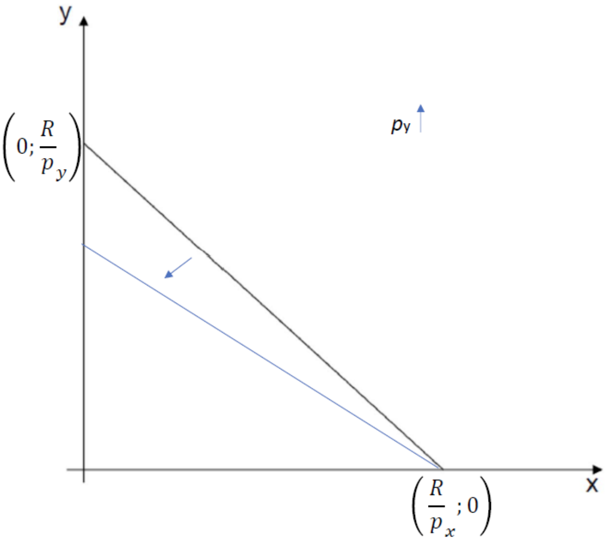
L'effet de changement d' paramètre exogènes sur EB.



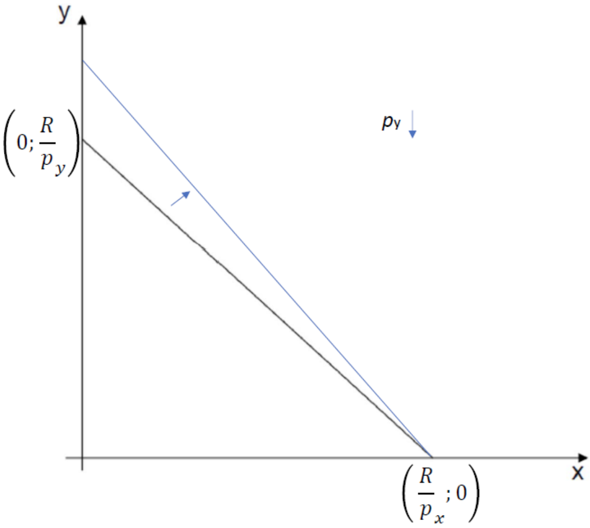
L'effet de changement d'un paramètre exogènes sur EB.



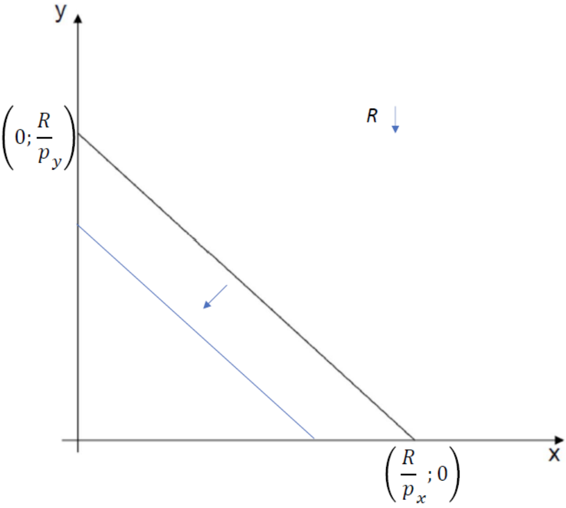
L'effet de changement d'un paramètre exogènes sur EB.



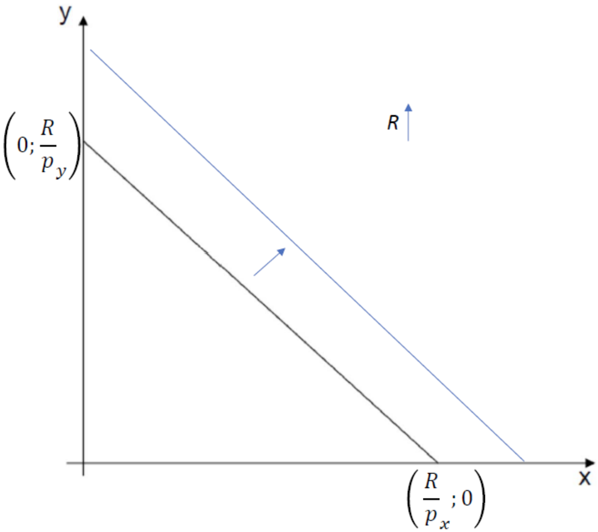
L'effet de changement d'un paramètre exogènes sur EB.



L'effet de changement d'un paramètre exogènes sur EB.

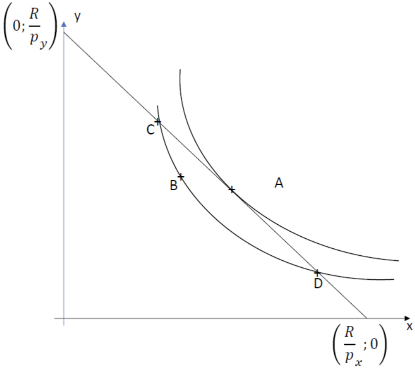


L'effet de changement d'un paramètre exogènes sur EB.



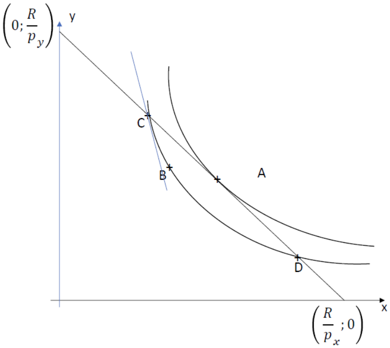
Le choix optimal sous la contrainte budgétaire: illustration.

Supposons par la suite que les préférences sont rationnelles, continues, strictement monotones et strictement convexes.
Le panier optimal est celui qui maximise la fonction d'utilité sous la contrainte budgetaire (parmis les paniers dans l'ensemble budgetaire). Il est tel que la droite budgétaire est tangente à la courbe d'indifférence qui passe en ce point.



Le choix optimal sous la contrainte budgétaire et TMS.

$$TMS_{y\rightarrow x} = \frac{p_x}{p_y}$$



Panier C: $TMS_{y\rightarrow x} > \frac{p_x}{p_y}$. Le consommateur peut vendre un peu du bien y, acheter un peu du bien x en gardant l'utilité constante et en faisant des épargnes.

Calcul du panier optimal à l'aide de la fonction d'utilité.

$$\begin{cases} \max\limits_{(x_1,...,x_n)} u(x_1,...,x_n) \\ s.c.\ p_1x_1 + ... + p_nx_n \leqslant R \end{cases}$$

Methode 1: Par substitution de la contrainte budgétaire dans la fonction d'utilité.
Par monotonicité strict des preferences, $p_1x_1 + ... + p_nx_n = R$, d'ou

$$x_n = \frac{1}{p_n}\left(R - \left(p_1x_1 + ... + p_{n-1}x_{n-1}\right)\right).$$

$$\max_{(x_1,...,x_{n-1})} u(x_1,...,x_{n-1}, \frac{1}{p_n}\left(R - \left(p_1x_1 + ... + p_{n-1}x_{n-1}\right)\right))$$

Par covexite strict des preferences,

$$\frac{\partial u(x_1,...,x_{n-1}, \frac{1}{p_n}(R-(p_1x_1+...+p_{n-1}x_{n-1})))}{\partial x_i} = 0,\ \ i = 1, ..., n-1.$$

Calcul du panier optimal à l'aide de la fonction d'utilité.

Deux biens: x et y.
Par monotonicité strict des preferences, $p_x x + p_y y = R$, d'ou

$$y = \frac{1}{p_y}\left(R - p_x x\right).$$

$$\max_x u(x, \frac{1}{p_y}\left(R - p_x x\right))$$

Par covexite strict des preferences,

$$\frac{du(x, \frac{1}{p_y}(R - p_x x))}{dx} = 0. \tag{2}$$

Remarque: equation (2) est equivament au $u'_x - \frac{p_x}{p_y} u'_y = 0$, d'ou $TMS_{y \to x} = \frac{p_x}{p_y}$.

Calcul du panier optimal à l'aide de la fonction d'utilité.

Supposons que $u(x, \frac{1}{p_y}(R - p_x x)) = x^\alpha y^{1-\alpha}$. Par monotonicité strict des preferences, $p_x x + p_y y = R$, d'ou $y = \frac{1}{p_y}(R - p_x x)$.

$$\max_x x^\alpha \left(\frac{1}{p_y}(R - p_x x)\right)^{1-\alpha}$$

Par covexite strict des preferences,

$$\begin{gathered}
0 = \left[x^\alpha \left(\frac{1}{p_y}(R - p_x x)\right)^{1-\alpha}\right]'_x = \\
\left(\alpha x^{\alpha-1}\left(\frac{R}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x\right)^{1-\alpha} - (1-\alpha)\, x^\alpha \left(\frac{R}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x\right)^{-\alpha}\right) = \\
= \left(\alpha z^{1-\alpha} - (1-\alpha)\, z^{-\alpha}\right), \text{ ou } z = \frac{\frac{R}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x}{x}, \text{ d'ou}
\end{gathered} \tag{3}$$

$$z = \frac{1-\alpha}{\alpha},\ x = \frac{\alpha R}{(1-\alpha)p_y + \alpha p_x} \text{ et } y = \frac{1}{p_y}(R - p_x x) = \frac{(1-\alpha)R}{(1-\alpha)p_y + \alpha p_x}.$$

Calcul du panier optimal à l'aide de la fonction d'utilité: exerecises.

Exercise 1: Trouvez le choix optimal sous le contraint budgétaire si $u(x, y) = xy$.

Exercise 2:

(a) Supposons que Nicolas a 10 euros dans la poche. Il rentre dans le resto ou deux plats : viande, x et légumes y sont vendues au poids (prix par gramme). Le prix de la viande $p_x = 2$, le prix des légumes est $p_y = 1$. Trouvez le choix de repas de Nicolas si il veut dépenser tout son budget ces préférences sont données par une fonction d'utilité: $u(x, y) = \sqrt{xy}$ (comparer votre réponse à exercice 1), $u(x, y) = x + y$, $u(x, y) = 2x + y$. Illustrez et interprétez vos réponses.

(b) Supposons que $u(x, y) = \sqrt{xy}$. Touvez $TMS_{y \to x}$ si $x = 2.5$ et $y = 5$. Trouvez $TMS_{y \to x}$ si $x = 1$ et $y = 8$. Pourquoi le choix $(1, 8)$ n'est pas optimal?

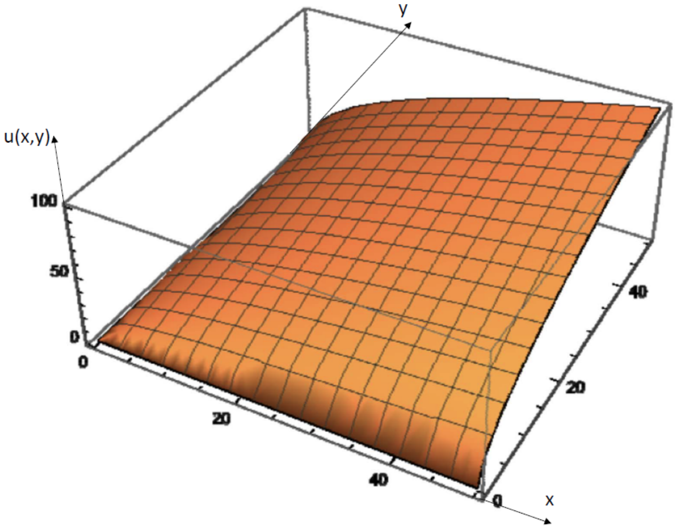
(c) Trouvez la solution graphique d'exercise 2.(a) avec $p_x = p_y = 1$.

Calcul du panier optimal.

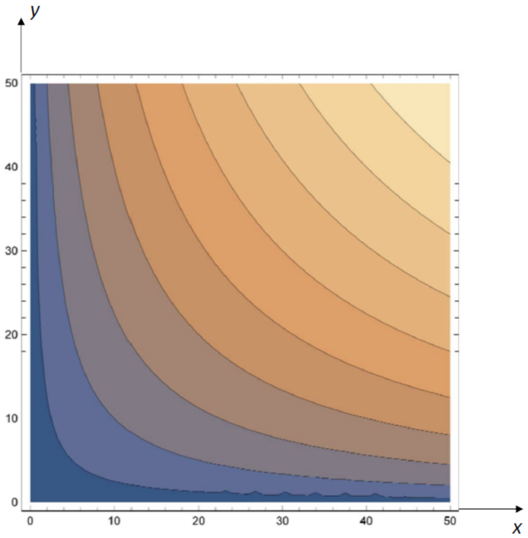
$$\begin{cases} \max\limits_{(x_1,\dots,x_n)} u(x_1,\dots,x_n) \\ s.c.\ p_1x_1+\dots+p_nx_n \leqslant R \end{cases}$$

Methode 2: Méthode de Lagrange.

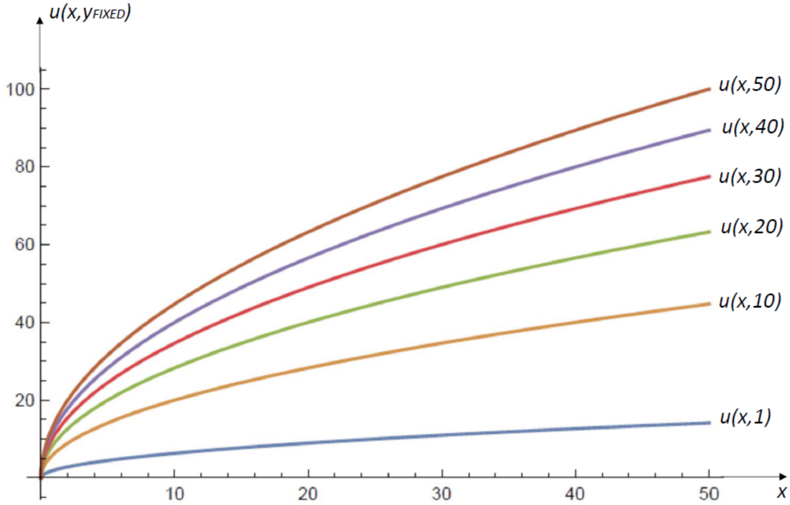
Graphique d'une fonction d'utilite de deux biens.



"Contour maps" (projection sur l'espace (x,y)).



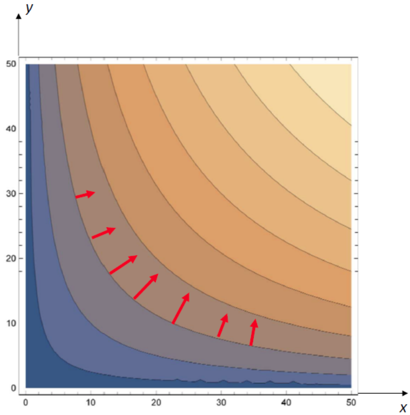
Graphique de u(x,y) pour y donné (projection sur l'espace (x,u)).



Gradient d'une fonction.

Considerons $f(x, y, ..., z)$.

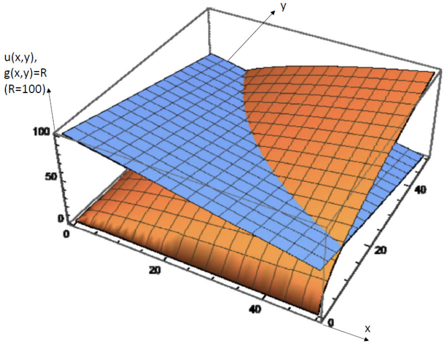
$$\nabla f(x, y, ..., z) = \left(f_x'(x, y, ..., z), f_y'(x, y, ..., z), ..., f_z'(x, y, ..., z)\right)$$

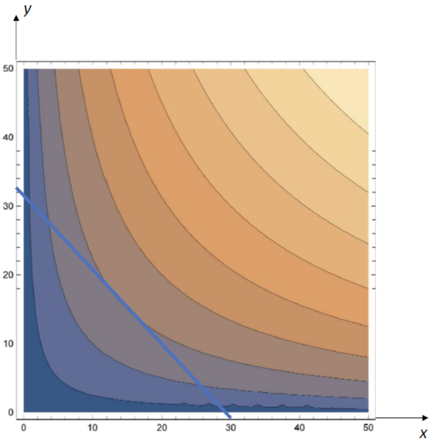


Fonction d'utilité et contraint budgetaire pour deux biens.

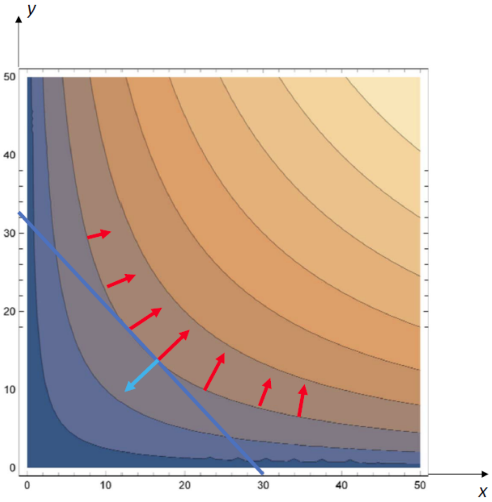
$$g(x) = p_x x + p_y y$$

Contraint budgetaire: $g(x) \leqslant R$




y
50
40
30
20
10
0
0
10
20
30
40
50
x

$$\nabla u(x, y) = -\lambda \nabla g(x, y)$$



Methode de Lagrange.

$$\mathcal{L}\left(x_1, ..., x_n, \lambda\right) = u(x_1, ..., x_n) + \lambda\left(R - \left(p_1 x_1 + ... + p_n x_n\right)\right).$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0,\ \ i = 1, ..., n; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0.$$

- Plus généralement (si les préférences ne sont pas strictement monotones) $\lambda\left(R - \left(p_1 x_1 + ... + p_n x_n\right)\right) = 0.$ Mais si vous êtes sûr que votre contraint est sature (les préférences strictement monotones), méthode 1 est plus simple.
- Les conditions du premier ordre donnent également une interprétation de λ comme l'utilité pour l'individu d'une quantité marginale de revenu supplémentaire: En effet $\lambda = \frac{u'_x}{p_x} = \frac{u'_y}{p_y}$ pour le panier optimal. Et quand l'individu obtient une petite quantité de revenu supplémentaire dR, il peut acheter du bien x en quantité $\frac{dR}{p_x}$, ce qui lui procure une utilité supplémentaire $\frac{u'_x}{p_x} dR = \lambda dR.$